

Матричная оптика – оптические матрицы

В матричной оптике любая осесимметричная система описывается 2×2 матрицей

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

которая называется *оптической матрицей* системы. Пусть световой луч на входе в систему задается своей высотой y_0 и углом наклона α_0 (все это относительно оси системы), т.е. характеризуется двумерным вектором

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Тогда после прохождения через систему высота y_1 и угол наклона α_1 будут

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay_0 + B\alpha_0 \\ Cy_0 + D\alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Оптическая матрица системы является последовательным произведением элементарных оптических матриц – матриц *перемещения, преломления, отражения*.

Матрица перемещения. Для получения матрицы перемещения рассмотрим световой луч, входящий в систему на высоте y_0 с углом наклона α_0 и свободно распространяющийся вправо на расстояние L .

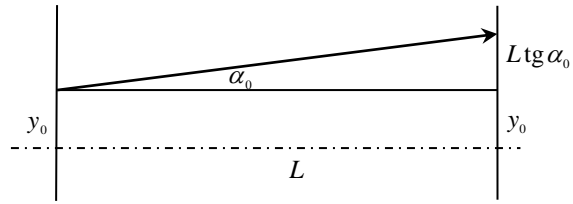


Рис. 1. Высота светового луча на входе y_0 , на выходе $y_0 + L \operatorname{tg} \alpha_0 \approx y_0 + L \alpha_0$, угол не меняется

Тогда на выходе из системы его высота будет $y_1 = y_0 + L \operatorname{tg} \alpha_0$. Учитывая условие параксимальности, в частности малость угла α_0 , можно заменить тангенс этого угла на сам угол и получить

$$y_1 = y_0 + L \alpha_0.$$

Учитывая, что луч распространяется в свободном пространстве, имеем также

$$\alpha_0 = \alpha_1.$$

Последние два соотношения можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Итак, перемещение светового луча в свободном пространстве на расстояние L описывается матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

которая и называется матрицей *перемещения*.

Матрица отражения. Переходим к отражению. Пусть световой луч отражается от сферического зеркала радиуса r . При этом отражение происходит на высоте y_0 и до от-

ражения луч имеет угол наклона α_0 . Мы используем два подхода для вывода матрицы отражения. Первый из них геометрический, как для матрицы перемещения, второй использует параксиальную или гауссову оптику.

Первый – геометрический вывод. Очевидно, что непосредственно при отражении высота луча не изменится, т.е.

$$y_1 = y_0,$$

а вот угол наклона поменяется, и каким образом, мы сейчас подсчитаем.

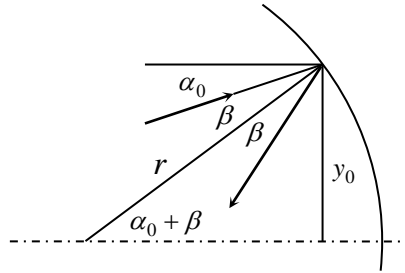


Рис. 2. При отражении высота светового луча не меняется, угол падения и угол отражения равны β

Так как зеркало сферическое, нормаль к нему совпадает с радиусом. Угол между световым лучом и радиусом – угол падения, обозначим β , угол отражения тоже будет β . Поэтому угол наклона отраженного луча будет $\alpha_0 + 2\beta$, а с учетом того, что после отражения луч будет двигаться в противоположном направлении и мы должны будем изменить положительное направление оси x , на самом деле будет

$$\alpha_1 = -\alpha_0 - 2\beta.$$

Прямоугольный треугольник на рисунке 2 дает нам $\sin(\alpha_0 + \beta) = y_0 / r$ или, учитывая малость углов, просто $\alpha_0 + \beta = y_0 / r$, поэтому

$$\alpha_1 = -\alpha_0 - 2\beta = \alpha_0 - 2(\alpha_0 + \beta) = \alpha_0 - 2y_0 / r.$$

Окончательно,

$$\begin{cases} y_1 = y_0 \\ \alpha_1 = -\frac{2}{r} y_0 + \alpha_0 \end{cases}.$$

Записав это в матричном виде, получаем

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Итак, отражение светового луча от зеркала радиуса r описывается матрицей

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r} & 1 \end{pmatrix},$$

которая называется *матрицей отражения*.

Добавим, что для луча, движущегося в обратном направлении, матрицы перемещения и отражения имеют тот же самый вид.

Второй вывод – используем гауссову оптику. Воспользуемся тем фактом, что в области параксиальной оптики луч, идущий параллельно оси зеркала, т.е. луч

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix},$$

после отражения попадает в фокус сферического зеркала, расположенный на расстоянии $r/2$ от его вершины

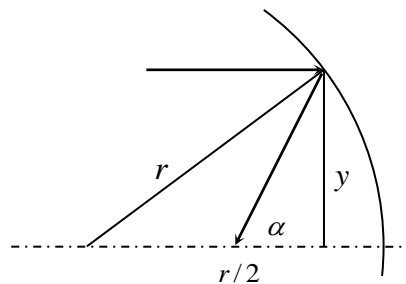


Рис. 3 Параксиальный луч, идущий параллельно оси зеркала, после отражения попадает в фокус, расположенный на расстоянии $r/2$ от вершины

Конечно же, непосредственно после отражения высота луча тоже будет равна y , а как показывает рисунок, угол наклона луча будет $\alpha = -y/(r/2)$, т.е. отраженный луч, характеризуется вектором

$$\begin{pmatrix} y \\ -\frac{2}{r}y \end{pmatrix}.$$

И это означает, что

$$\begin{pmatrix} y \\ -\frac{2}{r}y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay \\ Cy \end{pmatrix}.$$

Из равенства первых координат левого и правого векторов следует, что $A = 1$, из равенства вторых координат следует, что $C = -2/r$.

Теперь обратим направление только что рассмотренного луча. Тогда луч до отражения будет задаваться вектором

$$\begin{pmatrix} y \\ \frac{2}{r}y \end{pmatrix},$$

а после отражения

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

И это означает, что

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} y \\ \frac{2}{r}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \frac{2}{r}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay + B\frac{2}{r}y \\ Cy + D\frac{2}{r}y \end{pmatrix}.$$

Опять приравняем первые координаты, тогда из того, что $A = 1$, следует, что $B = 0$. А из равенства вторых координат следует, что $C + D(2/r) = 0$. Вместе с $C = -2/r$ это дает, что $D = 1$. Итак, все элементы матрицы отражения найдены, и мы опять имеем

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r} & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица тонкой линзы. Теперь, как только что мы сделали, с помощью гауссовой оптики найдем матрицу преломления для тонкой линзы с фокусным расстоянием f . Запустим два световых луча.

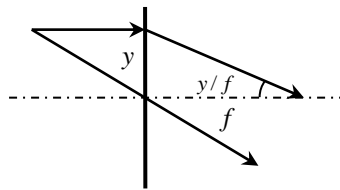


Рис. 4 Первый луч идет параллельно оси и после прохождения через линзу попадает в фокус, второй луч входит в линзу на нулевой высоте и не меняет своего направления

Первый из них идет параллельно оси на высоте y , т.е. характеризуется вектором

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

После прохождения через линзу он попадает в фокус, т.е. непосредственно на линзе он задается вектором

$$\begin{pmatrix} y \\ -\frac{1}{f}y \end{pmatrix}.$$

Т.к. эти два вектора связаны соотношением (матрицу тонкой линзы, как и матрицу отражения, обозначают той же буквой R)

$$\begin{pmatrix} y \\ -\frac{1}{f}y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay \\ Cy \end{pmatrix},$$

отсюда сразу получаем $A=1$, $C=-1/f$.

Второму лучу и до и после отражения соответствует вектор

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

И это означает, что

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\alpha \\ C\alpha \end{pmatrix},$$

а отсюда следует $B=0$ и $C=1$. Итак, *матрица тонкой линзы* имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}.$$

И матрицу отражения, и матрицу преломления можно записать в виде

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix},$$

где Φ – оптическая сила соответствующего устройства.

Здесь изложена всего лишь сокращенная версия оснований матричной оптики.

Подробное изложение имеется в книге: Джеррард А., Бёрч Дж.М. Введение в матричную оптику, 1978. Есть в электронной библиотеке мехмата МГУ, расположенной по адресу

<http://lib.mexmat.ru/>

Второй источник – конспект лекций: Родионов С.А. Основы оптики.– СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2000, расположен по адресу

http://aco.ifmo.ru/el_books/basics_optics/index.html

А вообще, <http://aco.ifmo.ru/> – это сайт кафедры прикладной и компьютерной оптики *Ленинградского института точной механики и оптики* (ЛИТМО), который недавно стал называться *Санкт-Петербургским государственным университетом информационных технологий, механики и оптики* (ИТМО).